$\Rightarrow \left[2\sqrt{x}\right]_n^{n+1} \leq U_n$

$\Rightarrow \boxed{2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n}$

Soit

$$\boxed{2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1}$$

3 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

On a $\boxed{2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n+1} - 2 = \boxed{+\infty}$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$$